電子情報工学実験報告
実験 5　ディジタル信号処理

報告者：5D–25　永安 佑希允
共同実験者：林直輝，吉澤泰士
指導教官：滝沢教官

実験日：2000 年 05 月 29 日
提出日：2000 年 06 月 05 日

1　目的

本実験では，ディジタル信号処理の基本の 1 つである，高速フーリエ変換（Fast Fourier Transform ; FFT）の原理について学び，その理解を深める。

2　概要

2.1　フーリエ変換

信号を表現するには，$x(t)$ などのように時間の関数として表す方法（時間領域表現）と，フリーエ係数，複素フリーエ係数によって表す方法（周波数領域表現）がある。この 2 つの領域を定義する式が，次に示すフーリエ変換対（Fourier Transform Pair）である。

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{1}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{-j\omega t}d\omega \tag{2}$$

信号処理および解析においてフーリエ変換は欠かせない処理手段の 1 つである。フーリエ変換をディジタル信号処理に適用するには，次に述べる離散データを扱う離散フーリエ変換が必要になる。

2.2　離散フーリエ変換

波形 $x(t)$ を一定時間 T_S でサンプリングして得られるいわゆる離散波形 $x(nT_S)$（n はサンプル番号）を用いて周波数スペクトルを求める操作が離散フーリエ変換（Discrete Fourier Transform ; DFT）である。このとき周波数スペクトルは，角周波数の連続量 ω に対してではなく，基本角周波数 ω_0 の整数倍の角周波数 $k\omega_0$（k は整数）に対する値として得られる。また，分析しようとする離散波形 $x(nT_S)$ の全サンプル数を N とすると，$\omega_0 = 2\pi/NT_S$ で与えられる。NT_S は全サンプル数の時間長に相当する。k は，角周波数の番号に相当する。以上より，離散的な周波数スペクトルを $X(k)$ とすると，フーリエ変換対の離散的に表現は，次式で定義される。

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \tag{3}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn} \tag{4}$$

2.3　高速フーリエ変換

高速フーリエ変換は，1965 年に米国の J.W.Cooley と J.W.Turkey によって発表された。先に述べた DFT を DFT 中の exp 関数の周期性を利用することで高速化させ，実用化させたのが FFT である。

データ長 N が 2 のベキ乗で与えられるものとする。このときサンプル時系列 $x(n)$ を，n が偶数番目の時系列 $x(2l)$ と，奇数番目の時系列 $x(2l+1)$ に分けると，$x(n)$ の DFT は次式で表せる。（ただし，$l = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}-1$ とした）

$$X(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} \left\{ x(l) W_N^{2lk} + x(2l+1) W_N^{(2l+1)k} \right\} \tag{5}$$

また，$W_N^2 = e^{-2j\frac{2\pi}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}}$ であるから，

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{l=0}^{N/2-1} x(l) W_{N/2}^{lk} + W_N^k \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l+1) W_{N/2}^{lk} && (6) \\ &= G(k) + W_N^k H(k) && (7) \end{aligned}$$

と表すことができる。ただし，$G(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} x(l) W_{N/2}^{lk}$, $H(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l+1) W_{N/2}^{lk}$ とする。

一方，$G(k)$ と $H(k)$ は $W_{N/2}$ が周期 $N/2$ でいることから，周期 $N/2$ の周期関数である。これらより，$N/2$ 個の k について $G(k)$ と $H(k)$ を計算すれば $X(k)$ を求めることができる。DFT の乗算回数が N^2 であったのに対し，FFT は $(N/2)^2$ 回の計算で済み，全体として計算回数は 1/2 になる。さらに。$G(k)$ と $H(k)$ はそれぞれ $N/2$ 点の DFT と考えられ，再分解される。この処理を繰り返すことによって，計算回数は約 $(N/2)\log_2 N$ 回の乗算と $N \log_2 N$ 回の加算となる。

3 実験

本実験では，図 1 の波形生成／フーリエ変換プログラムと，Microsoft Excel を組み合わせて使用する。

図 1: 実験に使用するソフトウェア

3.1　正弦波の加算と FFT による分析

ここでは，正弦波とその高調波を生成し，その合成波をフーリエ変換する。結果を，図 2，図 3，図 4，図 5，図 6，に示す。

今回は。基本波として $\sin(\omega t)$，高調波として $0.8\sin(4\omega t)$ を使用した。

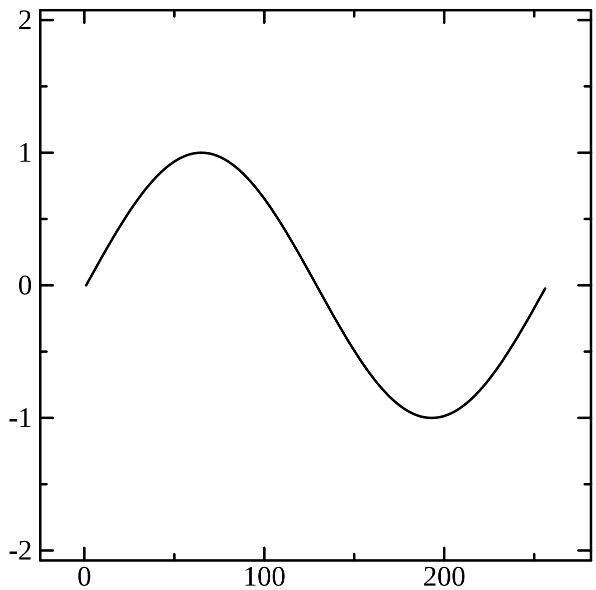

図 2: 基本波

3.2　矩形波の FFT による分析

ここでは，矩形波をフーリエ変換し，その高域成分と低域成分を削り，逆フーリエ変換する。これにより，高域低域フィルタをシミュレーションする。結果を，図 7，図 8，図 9 に示す。

4　課題

4.1　用語の調査

■サンプリング定理　サンプリング定理とは，ある波形を記録するためにはその波形の最高周波数の 2 倍の周波数でサンプリングする必要があるという定理である。逆に言えば，最高周波数の 2 倍のサンプリング周波数があれば，元の波形を再現できることを示している。

■エイリアシング　エイリアシング（aliasing）とは，サンプリング周波数が足りていない場合に，別の波形が再現されてしまう現象である。

図 10 では，高周波の波形の周期を T として，$\frac{3}{4}T$ 毎にしかサンプリングしなかった場合に，低周波の波形

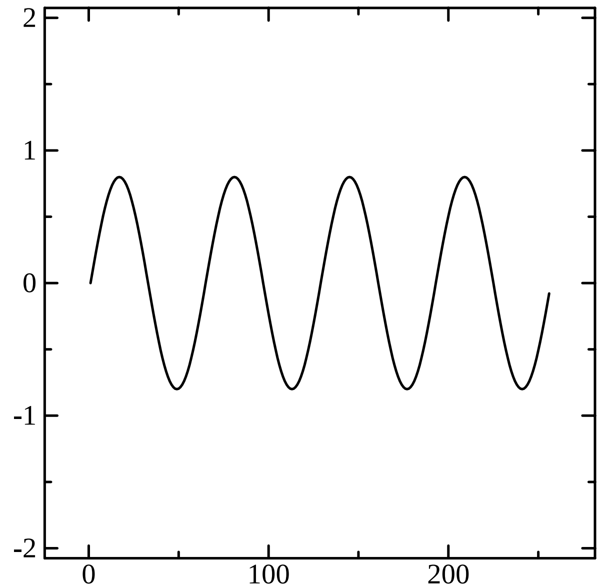

図 3: 高調波

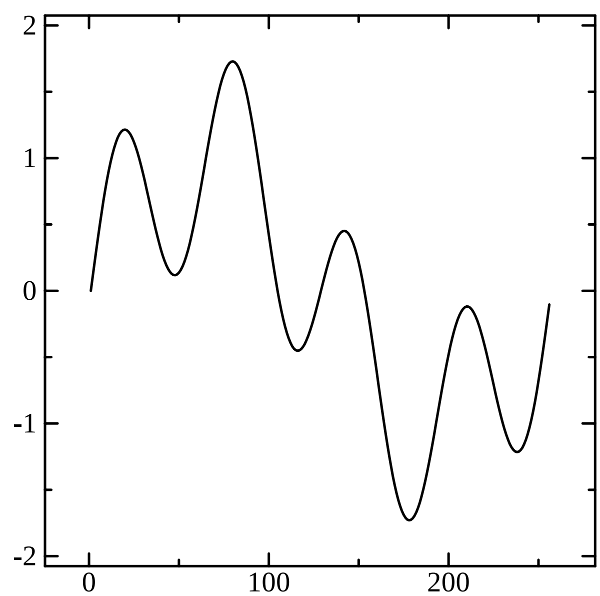

図 4: 基本波と高調波の合成波形

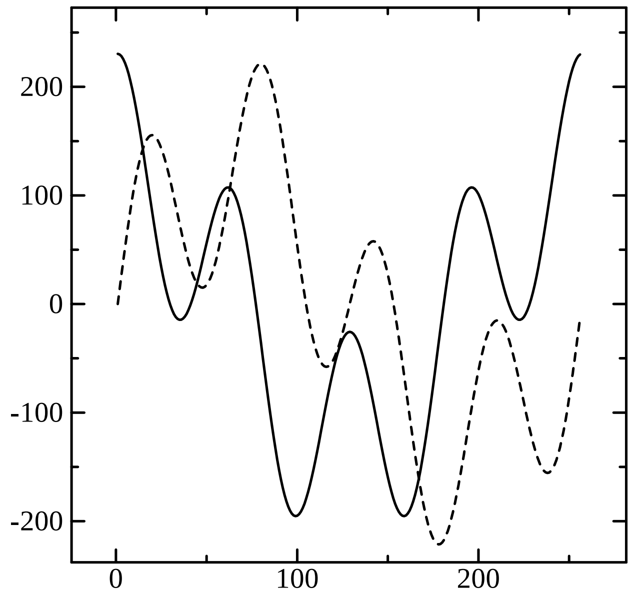

図 5: 基本波と高調波の合成波形のフーリエ変換結果

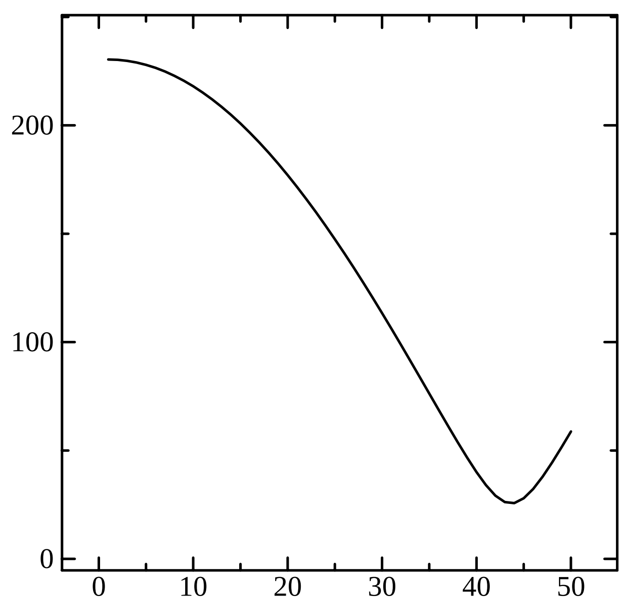

図 6: 基本波と高調波の合成波形のフーリエ変換結果の振幅成分（最初の部分）

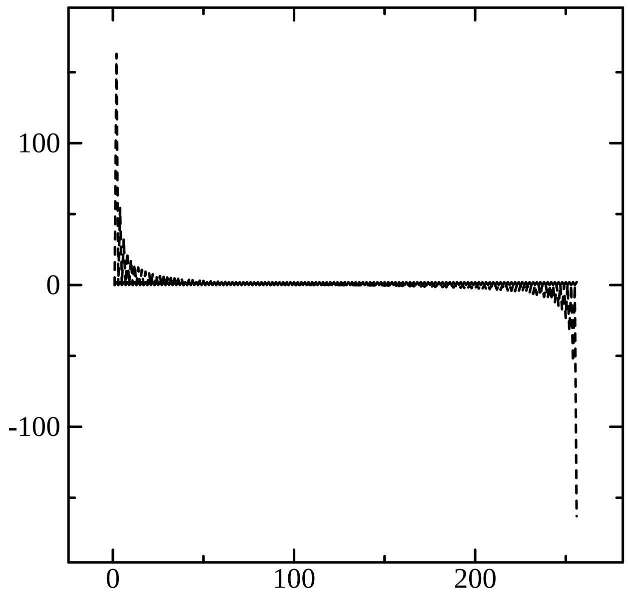

図 7: 矩形波のフーリエ変換結果

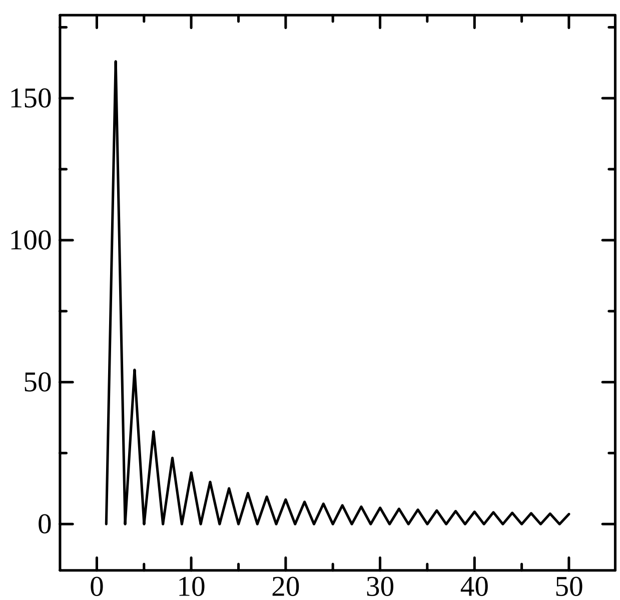

図 8: 矩形波のフーリエ変換結果の振幅成分（最初の部分）

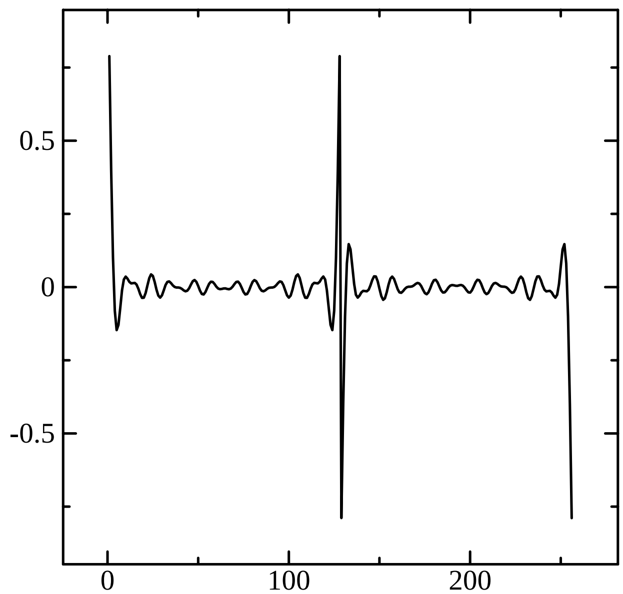

図 9: 矩形波のフーリエ変換結果の高低域成分を削って逆フーリエ変換した波形

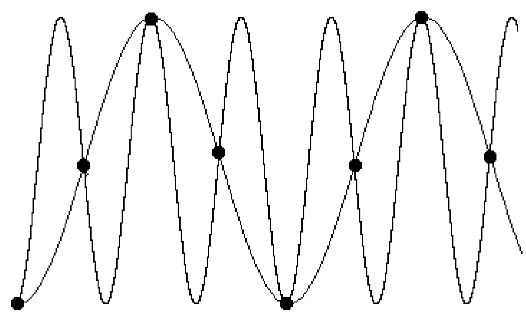

図 10: エイリアシングの例

が再現される現象を示している。

この現象を防ぐためには，サンプリング定理に基づき，最高周波数の 2 倍以上の周波数でサンプリングすることが必要になる。

参考文献

[1] 奥村晴彦『C 言語による最新アルゴリズム事典』(ISBN 4–87408–414–1)

[2] エイリアシング（http://mars.elcom.nitech.ac.jp/~masa/sampling2.html）

[3] サンプル&ホールド回路とサンプリング定理
（http://www.pn.scphys.kyoto-u.ac.jp/~enyo/kougi/elec/node52.html）

[4] パソコン知ったか辞典（http://www.nttpub.co.jp/paso/paso.html）

指導書の問題点

指導書には間違いかも知れない点をいくつか発見したので，書き留めておく。検証する必要があるかも知れない。

- $G(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} x(l) W_{N/2}^{lk}$ ではなく $G(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} x(2l) W_{N/2}^{lk}$ ではないか。前者の式だと，偶数奇数に関係なく，すべての成分が含まれることにならないか。
- DFT の乗算回数が N^2 であったのに対し，FFT は $(N/2)^2$ 回の計算で済むのなら，計算回数は $1/2$ ではなく $1/4$ ではないか。$(N/2)^2 = N^2/4$ である。
- 「高周波の生成」ではなく「高調波の生成」ではないか。